



Le filtrage numérique



Jean-Philippe MULLER

Décembre 2000

Sommaire

page

I) L'acquisition d'un signal analogique

• Echantillonnage	3
• Spectre du signal échantillonné	4
• Règle de Shannon	5
• Le filtre anti-repliement	6
• Le bloqueur	7
• La quantification	8

II) Le filtrage numérique

• Transformée en z d'une séquence numérique	10
• Transmittance en z d'un filtre numérique	11
• Algorithme de calcul de y_n	12
• Stabilité d'un filtre	13
• Réponse harmonique d'un filtre	14
• Synthèse d'un filtre numérique	15
• Réalisation matérielle des filtres numériques	16

III) La restitution du signal analogique

• Par bloqueur et filtrage passe-bas	17
• Distorsion du spectre due au bloqueur	18
• Utilisation d'un filtre compensateur de sinus cardinal	19
• Restitution par suréchantillonnage	20

Annexes :

• A - exemples de filtres antirepliement	21
• B - exemple de filtre compensateur de sinus cardinal	22
• C - exemple d'interface entrée sortie pour DSP	23
• D - tableau des transformées en z	24
• E - le filtre numérique dans la synthèse vocale	25

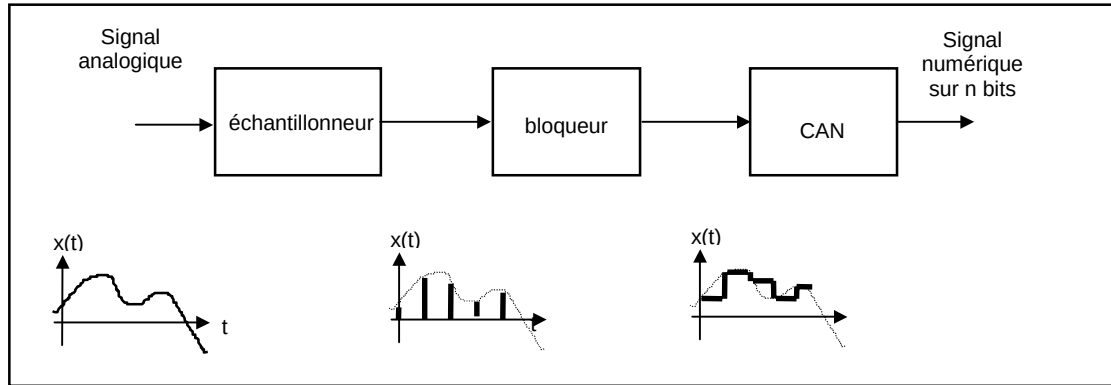
Exercices d'application	26
-------------------------	----

I) Acquisition d'un signal analogique :

Elle se fait en trois phases distinctes :

- la prise d'un échantillon ou échantillonnage
- son maintien durant la conversion A/N ou blocage
- la conversion analogique-numérique

Figure 1.
Structure de la chaîne d'acquisition d'un signal analogique.



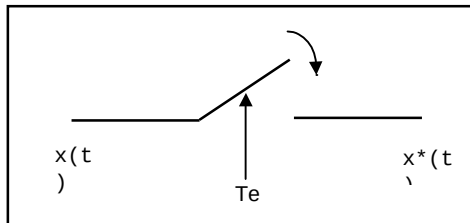
L'échantillonnage modifie la forme du signal et donc son spectre. On étudiera successivement les différents aspects de cette acquisition.

1) Echantillonnage :

Pour échantillonner un signal analogique continu $x(t)$ et le transformer en une suite discrète d'échantillons $x^*(t)$, on prélève périodiquement à des intervalles de temps T_e la valeur du signal.

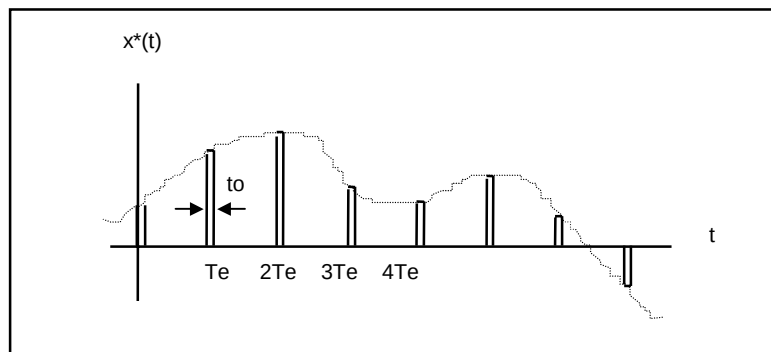
Cette fonction de prélèvement d'échantillons est assurée par un commutateur analogique K qui se ferme durant un temps t_o très bref toutes les T_e secondes. Ce temps t_o s'appelle temps d'ouverture de la porte d'échantillonnage.

Figure 2.
L'échantillonneur.



Le signal échantillonné est constitué par un train d'impulsions espacées de T_e , de largeur t_o et d'amplitude $x(nT_e)$.

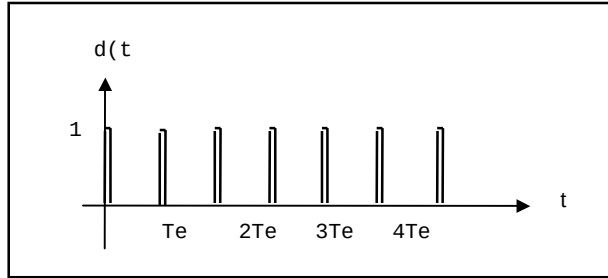
Figure 3.
Allure temporelle d'un signal échantillonné.



En pratique le temps d'ouverture t_o est toujours négligeable devant la période d'échantillonnage T_e .

On peut considérer que ce signal échantillonné $x^*(t)$ peut être obtenu à partir du signal analogique $x(t)$ en le multipliant par le signal d'échantillonnage $d(t)$ suivant :

Figure 4.
Allure temporelle
du signal
d'échantillonnage.



Le signal d'échantillonnage $d(t)$ est caractérisé par :

- une période de répétition T_e
- une largeur t_o
- une amplitude unité

On écrira donc :

$$x^*(t) = x(t).d(t)$$

Cette manière de voir permet de mettre en évidence simplement les effets de l'échantillonnage sur le spectre du signal $x(t)$.

2) Spectre d'un signal échantillonné :

Le signal d'échantillonnage $d(t)$ est un signal périodique dont la décomposition en série de Fourier contient une valeur moyenne d_0 , un fondamental d_1 à la fréquence $f_e = 1/T_e$ et des harmoniques d_n :

$$d(t) = d_0 + d_1.\cos(\omega_e t) + d_2.\cos(2\omega_e t) + \dots + d_n.\cos(n\omega_e t) + \dots$$

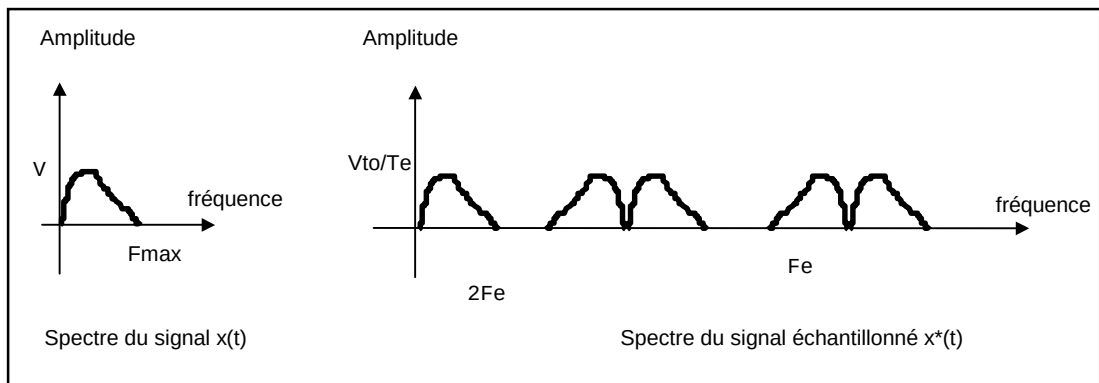
avec : $d_0 = t_o/T_e$ et $d_n = \frac{2.\sin(n\pi t_o/T_e)}{n\pi}$

Le signal échantillonné $x^*(t)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} x^*(t) &= x(t).d(t) = x(t). \left(\frac{t_o}{T_e} + 2\frac{t_o}{T_e}.\cos(\omega_e t) + 2\frac{t_o}{T_e}.\cos(2\omega_e t) + \dots \right) \\ &= x(t).\frac{t_o}{T_e} + 2\frac{t_o}{T_e}.x(t).\cos(\omega_e t) + 2\frac{t_o}{T_e}.x(t).\cos(2\omega_e t) + \dots \end{aligned}$$

Le signal échantillonné est beaucoup plus riche puisqu'il contient des termes à tous les multiples de la fréquence d'échantillonnage f_e , son spectre est donc assez différent du spectre de $x(t)$.

Figure 5.
Spectre d'un
signal
échantillonné
quelconque.



On obtient le spectre de $x^*(t)$ en reproduisant le spectre de $x(t)$ autour de chaque multiple de la fréquence d'échantillonnage f_e .

3) Règle de Shannon :

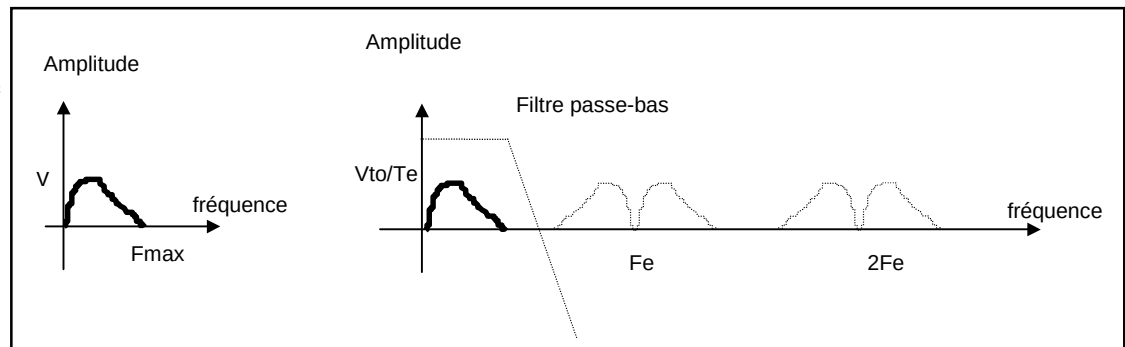
L'opération d'échantillonnage ne doit pas amener une perte d'informations. Autrement dit l'opération d'échantillonnage doit être réversible et on doit pouvoir repasser du signal échantillonné au signal initial.

Ceci n'est possible que si la fréquence F_e est suffisamment élevée, d'où le résultat fondamental :

Si on ne veut pas perdre d'information, il faut que la fréquence d'échantillonnage soit au moins égale au double de la fréquence maximale F_{max} contenue dans le signal.

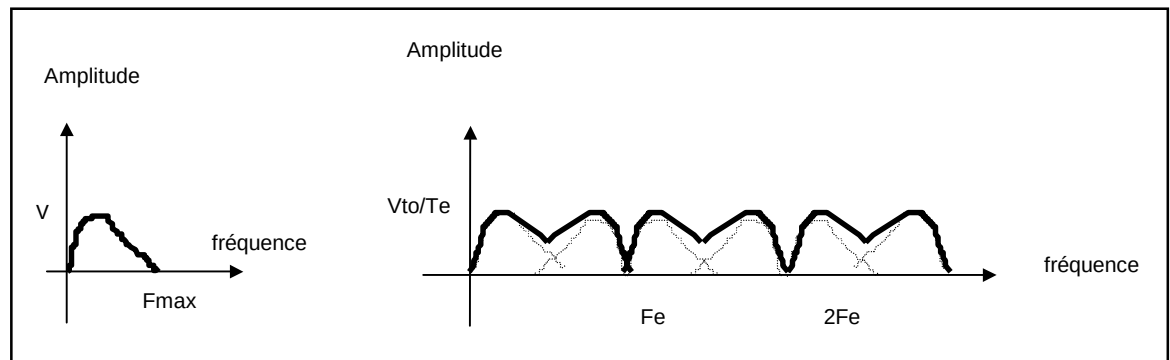
Dans ce cas, on pourra, du moins en théorie, revenir en arrière par simple filtrage passe-bas.

Figure 6.
Signal
échantillonné avec
le bon choix de
 F_e



Si on n'échantillonne pas assez vite, les différents paquets spectraux se recouvrent et l'opération d'échantillonnage n'est plus réversible.

Figure 7.
Signal
échantillonné à
une fréquence
d'échantillonnage
in correcte..



Dans la pratique, la règle de Shannon est toujours appliquée et nous conduit, pour l'échantillonnage de la voix par exemple, aux choix suivants :

- **Son en qualité téléphonique** : $F_{max} = 3 \text{ kHz}$ et $F_e = 8 \text{ kHz}$
Chaque échantillon est codé sur 8 bits, soit un débit $D = 8.8000 = 64 \text{ kbits/s}$

- **Son en qualité hi-fi** : $F_{max} = 20 \text{ kHz}$ et $F_e = 44,1 \text{ kHz}$
Codage en stéréo sur 16 bits, soit un débit $D = 2.16.44100 = 1,41 \text{ Mbits/s}$

4) Le filtre anti-repliement :

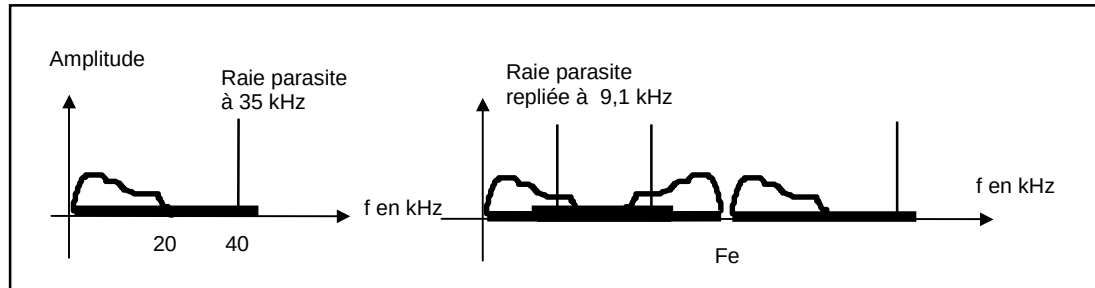
Le bon choix de F_e nécessite de bien connaître la valeur de $F_{\max}$, fréquence maximale contenue dans le signal à échantillonner.

Prenons l'exemple d'un microphone qui fournit un signal électrique composé:

- de la musique dans la bande 20 Hz-20 kHz
- de bruit électrique à densité spectrale constante dans la bande 0-40 kHz
- d'un signal parasite à 35 kHz

L'ingénieur du son qui choisit une fréquence d'échantillonnage $F_e = 44,1$ kHz respecte la règle de Shannon pour la musique, mais pas pour le bruit, ni pour le signal parasite.

Figure 8.
Spectre d'un
signal musical +
bruit
échantillonnés.



On constate l'apparition dans la bande audio par **repliement de spectre** :

- d'un signal parasite à $44,1 - 35 = 9,1$ kHz qui est devenu audible
- d'une augmentation du bruit provenant du bruit au-delà de 20 kHz replié vers les BF

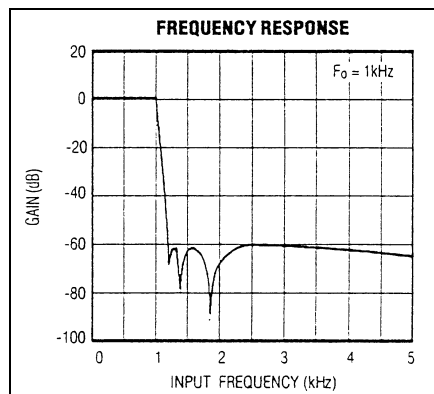
Pour éviter ces problèmes, il faut s'assurer que le spectre est vraiment limité à $F_{\max}$. La meilleure façon de s'en assurer est de placer un filtre à coupure raide qui atténuera très fortement tous les signaux parasites au-delà de la fréquence limite $F_{\max}$: c'est le **filtre anti-repliement**.

Ce filtre passe-bas doit avoir les spécifications suivantes :

- fréquence de coupure égale à $F_{\max}$
- variations de gain minimales dans la bande passante
- pente la plus raide possible après la coupure
- atténuation hors bande passante adaptée au nombre de bits N de la numérisation

On pourra par exemple utiliser un filtre MAXIM Max 294 du huitième ordre dont la courbe de réponse a l'allure suivante :

Figure 9.
Exemple de
gabarit de filtre
anti-repliement .



D'autres exemples de filtres antirepliement sont donnés en annexe A et C.

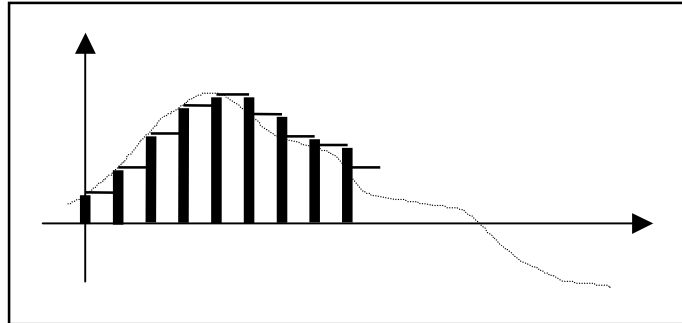
En conclusion, le filtre anti-repliement ne supprime pas le phénomène de repliement, mais atténue le signal replié au point de le rendre négligeable.

5) Le bloqueur :

Pour permettre la conversion analogique-numérique entre deux instants d'échantillonnage, il faut maintenir la valeur du signal $x(nT_e)$ à l'entrée du convertisseur jusqu'à l'arrivée de l'échantillon suivant.

De ce fait l'échantillonneur est toujours suivi dans la pratique d'un circuit de maintien appelé bloqueur.

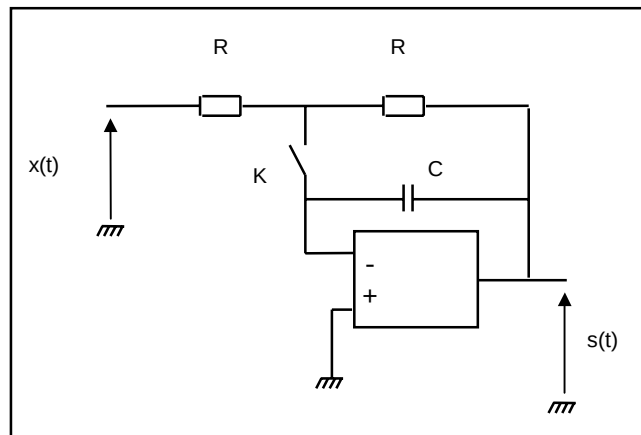
Figure 10.
L'échantillonneur
bloqueur



Dans la pratique, cette mémorisation de la grandeur analogique est toujours réalisée à l'aide d'un condensateur qui devra être choisi avec un faible courant de fuite.

Voici un exemple de réalisation pratique d'un échantillonneur bloqueur :

Figure 11.
Exemple pratique
d'échantillonneur
bloqueur.



Le dispositif fonctionne en deux temps :

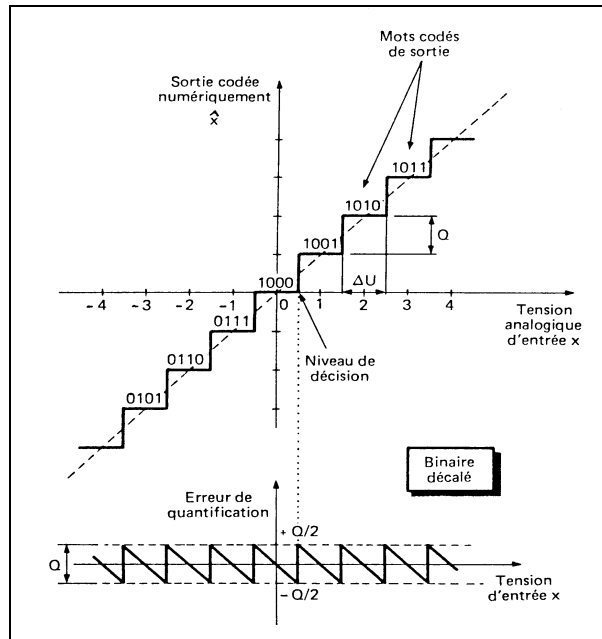
- K fermé : échantillonnage C se charge à la tension $x(nT_e)$ avec une constante de temps RC
- K ouvert : phase de blocage C garde sa charge et on a $s(t) = -x(nT_e)$

Pour éviter une perte de charge de C durant la phase de maintien, il faut utiliser un Aop à faible courant d'entrée et un condensateur de très bonne qualité à faibles pertes.

6) La quantification :

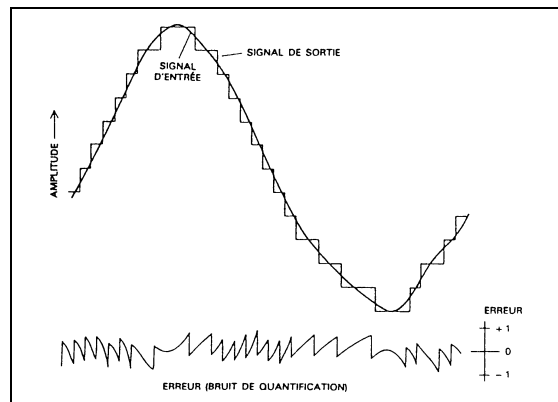
Le signal en marches d'escalier peut maintenant être converti en une suite de valeurs binaires. Il faut donc classer les échantillons analogiques selon différents niveaux : c'est le rôle du quantificateur réalisé en pratique par le convertisseur analogique-numérique.

Figure 12.
Caractéristique
de transfert d'un
quantificateur
linéaire 4 bits.



En remplaçant un échantillon par un autre de valeur voisine, on introduit une **erreur d'arrondi** quasiment aléatoire appelée **bruit de quantification**.

Figure 13.
La valeur crête
du bruit de
quantification ne
dépend pas du
niveau du signal.



Contrairement au bruit d'un système analogique, ce type de bruit qui se traduit par une sorte de bourdonnement n'apparaît qu'en présence d'un signal.

Le rapport Signal/Bruit atteint pour un signal d'amplitude maximale $S_{\max}$ utilisant la pleine échelle des 2^N niveaux vaut :

$$S/B_{\text{en dB}} = 6.N + 2$$

Le bruit de quantification a une valeur crête égale au quantum Q . Si l'amplitude du signal traité diminue, le rapport S/B se dégrade.

C'est à ce niveau que se trouvent la faiblesse et la force des systèmes numériques :

- faiblesse car on dégrade la qualité en quantifiant
- force car on peut toujours améliorer la qualité en augmentant le nombre de bits N

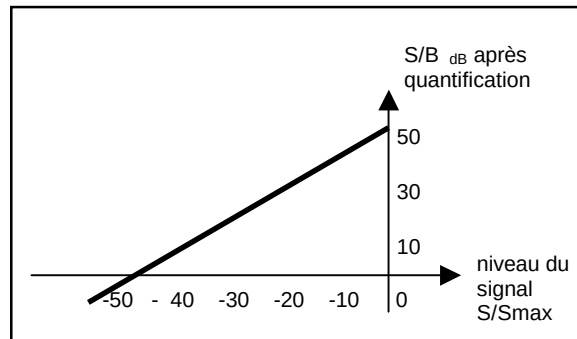
Exemple : un convertisseur analogique-numérique 8 bits travaille sur une plage d'entrée de -5V à +5V. La conversion se fera donc sur 256 niveaux.

Le bruit de quantification a une valeur crête de $Q = 10/256 = 40 \text{ mV}$ quel que soit l'amplitude du signal.

- un signal d'amplitude 5V sera digitalisé sur 256 niveaux, d'où un rapport $S/B = 6.N + 2 = 50 \text{ dB}$
- un signal d'amplitude 2,5V sera digitalisé sur 128 niveaux soit 7 bits, d'où un rapport S/B de 44 dB .

La courbe montrant l'évolution du rapport signal/bruit après quantification sur 8 bits en fonction du niveau du signal traité met en évidence le phénomène :

Figure 14.
Dans un système à quantification linéaire, le rapport S/B diminue avec le niveau du signal.



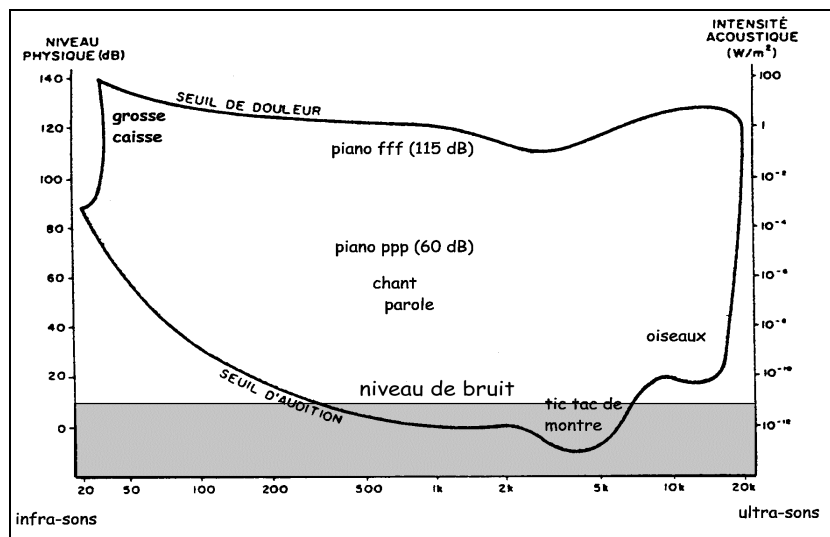
Cette dégradation du rapport S/B pose un problème dans des applications comme le téléphone pour lequel la voix est justement codée sur $N = 8$ bits.

Pour pallier à ce défaut, on utilise en téléphonie une courbe de quantification non linéaire qui permet d'avoir un rapport S/B constant sur une plage de dynamique supérieure à 30 dB .

Dans le cas de la musique échantillonnée sur 16 bits, la situation est un peu différente. En effet, avec une quantification sur 16 bits le rapport signal/bruit est voisin de 100 dB à niveau maximal.

Si la chaîne de reproduction sonore est capable de fournir à niveau maximal un volume sonore de 110 dB (amplificateur de 100 W , enceintes de rendement 90 dB/W), le bruit de quantification reste à un niveau de 10 dB , soit à peine au-dessus du seuil d'audition.

Figure 15.
Le niveau de bruit de quantification dans un système audio numérique à 16 bits.



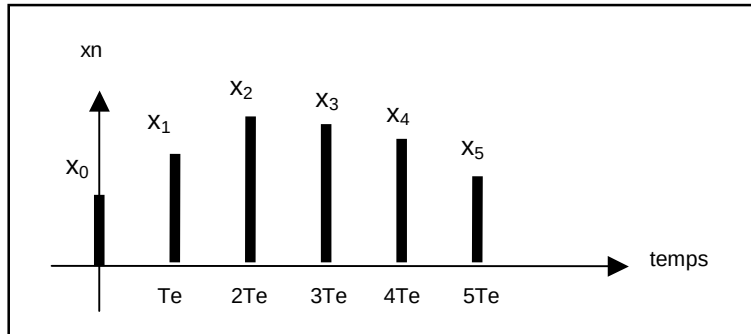
Ce bruit de quantification sera probablement plus faible que le bruit thermique en sortie de la chaîne de reproduction sonore et que le bruit ambiant.

I I) Filtrage numérique :

1) Transformée en z d'une séquence numérique :

Considérons une séquence numérique x_n constituée des valeurs du signal $x(t)$ échantillonné aux instants $t=0, T_e, 2T_e \dots$. On supposera que le signal $x(t)$ est nul pour $t < 0$.

Figure 16.
Séquence
d'échantillons.



On appelle transformée en z de la séquence numérique x_n le polynôme $X(z)$ défini par la relation :

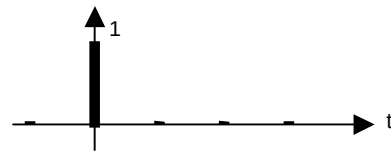
$$X(z) = x_0 + x_1 \cdot z^{-1} + x_2 \cdot z^{-2} + x_3 \cdot z^{-3} + \dots$$

Prenons quelques exemples simples :

- séquence impulsion unité :

$x_n = 1$ à $t = 0$
 $x_n = 0$ à $T_e, 2T_e \dots$

$$X(z) = 1$$



- séquence échelon :

$x_n = 0$ si $t < 0$
 $x_n = 1$ si $t \geq 0$

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$



D'autres transformées en z de signaux usuels sont donnés en Annexe D.

Remarque : en réalité, cette transformée en z n'est rien d'autre qu'une transformée de Laplace cachée derrière le changement de variable :

$$z = e^{T_e p}$$

En effet, le signal échantillonné $x^*(t)$ peut s'écrire :

$$x^*(t) = x_0 \cdot \delta(t) + x_1 \cdot \delta(t - T_e) + x_2 \cdot \delta(t - 2T_e) + x_3 \cdot \delta(t - 3T_e) + \dots \quad \text{où } \delta(t) \text{ est l'impulsion de Dirac}$$

La transformée de Laplace de $x^*(t)$ s'écrit alors :

$$X^*(p) = x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot e^{-T_e p} + x_2 \cdot e^{-2T_e p} + x_3 \cdot e^{-3T_e p} + \dots \quad \text{et, si on pose } z = e^{T_e p}$$

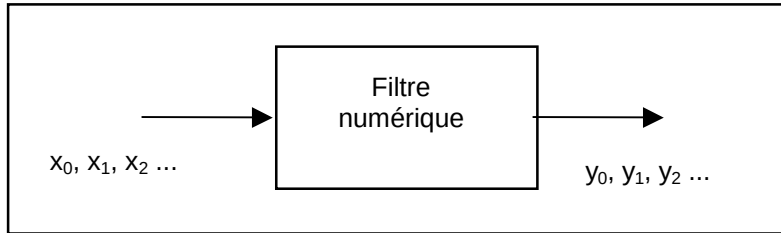
$$X(z) = x_0 + x_1 \cdot z^{-1} + x_2 \cdot z^{-2} + x_3 \cdot z^{-3} + \dots$$

La transformée en z d'un signal a donc les mêmes propriétés mathématiques que la transformée de Laplace.

2) Transmittance en z d'un filtre numérique :

Soit un système qui à une séquence d'entrée x_n restitue en sortie une séquence y_n :

Figure 17.
Transmittance
d'un filtre
numérique.



Soient $X(z)$ et $Y(z)$ les transformées en z des séquences d'entrée et de sortie.

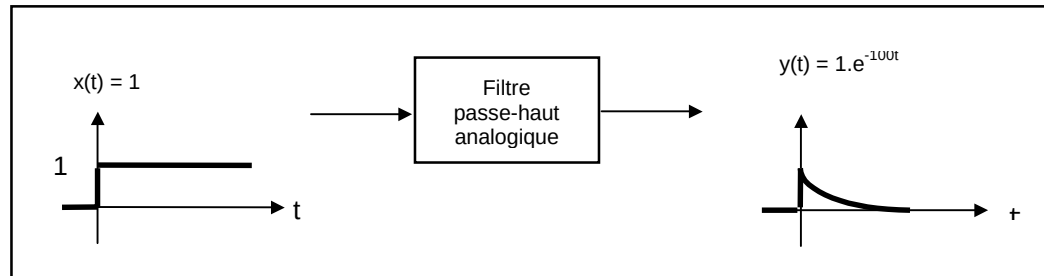
La transmittance $T(z)$ du filtre est alors définie par :

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Puisque les transformées $X(z)$ et $Y(z)$ sont des polynômes contenant les puissances négatives de z , la transmittance sera un rapport de deux polynômes en puissances négatives de z .

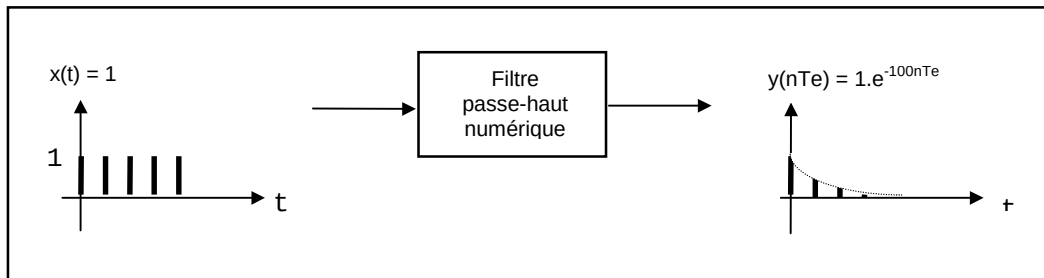
Cherchons par exemple la transmittance d'un filtre passe-haut numérique qui répondrait à un échelon d'une façon identique à un filtre analogique de constante de temps $\tau = 10$ ms et donc de fréquence de coupure $f_c = 1/2\pi\tau = 15,9$ Hz :

Figure 18.
Réponse indicielle
d'un filtre
analogique passe-
haut.



Le filtre numérique équivalent aurait le comportement suivant :

Figure 19.
Réponse indicielle
d'un filtre
numérique passe-
haut.



Si le signal est échantillonné à $F_e = 1$ kHz, soit $T_e = 1$ ms, alors :

$$X(z) = z/(z - 1) \quad \text{et} \quad Y(z) = z/(z - k) \quad \text{avec} \quad k = e^{-100 \cdot T_e} = 0,905$$

Nous en déduisons la transmittance du filtre : $T(z) = Y(z)/X(z) = (z - 1)/(z - 0,905)$

Cet exemple simple montre combien il est aisé de trouver la transmittance d'un filtre numérique qui à une entrée donnée répond par une sortie de forme particulière. Cette technique, utilisée pour faire la synthèse de filtres numériques sophistiqués, s'appelle la **méthode de l'identification de la réponse impulsionnelle** ou **indicielle**.

3) Algorithme de calcul de y_n :

L'algorithme nous permet de calculer la valeur de l'échantillon de sortie y_n en fonction des échantillons d'entrée et de sortie précédents.

Le filtre numérique le plus général peut se décrire par un algorithme de calcul de la forme :

$$y_n = a_1.y_{n-1} + a_2.y_{n-2} + a_3.y_{n-3} + \dots + a_p.y_{n-p} + b_0.x_n + b_1.x_{n-1} + b_2.x_{n-2} + \dots + b_q.x_{n-q}$$

Il utilise donc pour calculer la sortie à l'instant $t = nT_e$ les p échantillons précédents de la sortie et les q échantillons précédents de l'entrée, plus celui qui vient d'être appliqué sur l'entrée x_n .

Suivant la forme de l'algorithme, on distingue **deux grandes familles de filtres** qui ont chacune leurs propriétés particulières :

- filtres pour lesquels la sortie ne dépend que des entrées et pas des sorties
 - leur réponse à une impulsion s'annule au bout d'un certain temps
 - ils s'appellent **filtres non récurrents** ou à **réponse impulsionnelle finie (FIR)**
 - ils n'ont pas d'équivalent analogique
 - exemple : le filtrage par moyenne glissante $y_n = (x_n + x_{n-1} + x_{n-2})/3$
- filtres pour lesquels la sortie dépend des entrées et des sorties précédentes
 - leur réponse à une impulsion s'annule au bout d'un temps infini
 - ils s'appellent **filtres récurrents** ou à **réponse impulsionnelle infinie (IIR)**
 - exemple : le passe-bas du premier ordre $y_n = 0,5.y_{n-1} + 0,25.(x_n + x_{n-1})$

Pour trouver la relation entre la transmittance et l'algorithme, écrivons le calcul que doit faire le système à chaque instant d'échantillonnage, puis multiplions chaque ligne par le multiplicateur correspondant et additionnons toutes ces équations :

instant			multiplicateur
0	$y_0 =$	$b_0.x_0$	1
T_e	$y_1 = a_1.y_0$	$+ b_0.x_1 + b_1.x_0$	z^{-1}
$2T_e$	$y_2 = a_1.y_1 + a_2.y_0$	$+ b_0.x_2 + b_1.x_1 + b_2.x_0$	z^{-2}
.			
.			
nT_e	$y_n = a_1.y_{n-1} + a_2.y_{n-2} + \dots + a_p.y_{n-p}$	$+ b_0.x_n + b_1.x_{n-1} + b_2.x_{n-2} + \dots + b_q.x_{n-q}$	z^{-n}
.			

$$Y(z) = a_1.Y(z).z^{-1} + a_2.Y(z).z^{-2} + \dots + a_p.Y(z).z^{-p} + b_0.X(z) + b_1.X(z).z^{-1} + \dots + b_q.X(z).z^{-q}$$

à comparer avec l'algorithme de départ :

$$y_n = a_1.y_{n-1} + a_2.y_{n-2} + a_3.y_{n-3} + \dots + a_p.y_{n-p} + b_0.x_n + b_1.x_{n-1} + b_2.x_{n-2} + \dots + b_q.x_{n-q}$$

On constate qu'on passe très facilement de l'algorithme à une écriture en z en utilisant une règle de passage très simple :

- l'équation donnant y_n est de la même forme que celle qui donne $Y(z)$
- pour passer de l'une à l'autre il suffit de faire correspondre y_{n-i} à $Y(z).z^{-i}$ et inversement

Exemple : filtre passe-haut de transmittance : $T(z) = (z-1)/(z-0,905) = Y(z)/X(z)$

On en déduit $Y(z).(z-0,905) = X(z).(z-1)$ et, en développant $z.Y(z) - 0,905.Y(z) = z.X(z) - X(z)$

Divisons par z les deux membres et isolons $Y(z)$: $Y(z) = 0,905.Y(z).z^{-1} + X(z) - X(z).z^{-1}$

Nous en déduisons l'algorithme : $y_n = 0,905.y_{n-1} + x_n - x_{n-1}$

4) Stabilité d'un filtre numérique :

Comme pour les filtres analogiques, il est possible de prévoir à partir de la transmittance la stabilité ou l'instabilité du système physique correspondant.

Pour déterminer si un système analogique continu de transmittance $T(p)$ est stable on calcule les pôles qui sont les valeurs de p annulant le dénominateur.

Le système est stable si les pôles sont négatifs ou complexes avec une partie réelle négative .
Si on place ces pôles dans le plan complexe, ils se trouvent tous dans le demi-plan de gauche.

Ce critère de stabilité reste valable pour les transmittances $T^*(p)$ des systèmes échantillonnés.

Un système échantillonné de transmittance $T^*(p)$ est stable si tous ses pôles sont négatifs ou complexes à partie réelle négative.

Comme avec les systèmes échantillonnés on travaille le plus souvent avec les transmittances en z , il est intéressant de voir la position des pôles z_i dans le plan pour un système stable .

Nous savons que z et p sont liés par le changement de variable :

$$z = e^{T_e \cdot p}$$

Un système stable aura des pôles $p_i = a_i + j b_i$ avec $a_i < 0$

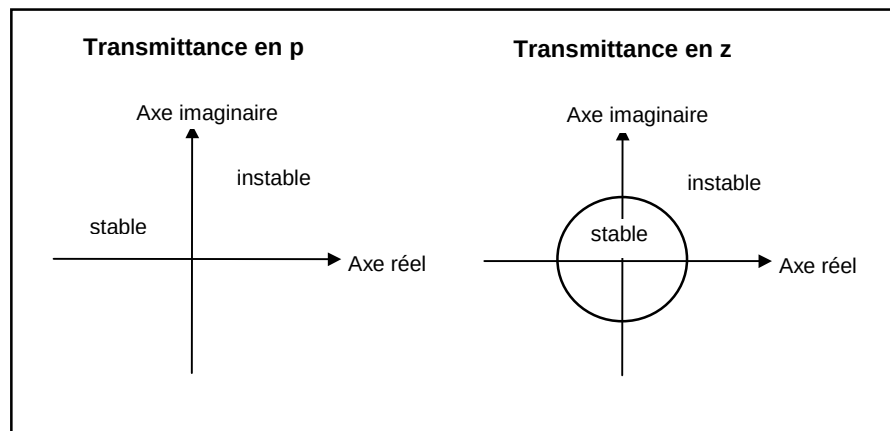
$$\text{Le point correspondant } z_i = e^{T_e \cdot p_i} = e^{T_e \cdot (a_i + j b_i)} = e^{T_e \cdot a_i} (\cos b_i + j \sin b_i)$$

est tel que : module du nombre complexe $z_i = e^{T_e \cdot a_i} < 1$

Nous en déduisons un critère de stabilité graphique pour un système échantillonné :

Un système échantillonné de transmittance $T(z)$ est stable si tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité.

Figure 20.
Critère de
stabilité d'un
système
numérique.



Exemple : le filtre de transmittance $T(z) = (z-1)/(z-0,905)$ a un pôle $z_1 = 0,905$ à l'intérieur du cercle unité.

Il est donc stable.

5) Réponse harmonique d'un filtre numérique :

Pour représenter la courbe de gain et de phase d'un filtre, il faut étudier sa transmittance complexe .

Or nous avons vu que la transformée en z n'est qu'une transformée de Laplace avec un changement de variable. On passe donc très simplement de $T(z)$ à $T^*(p)$ et à $\underline{T}^*(j\omega)$:

$$T(z) \xrightarrow{z = e^{Tep}} T^*(p) \xrightarrow{p = j\omega} \underline{T}^*(j\omega)$$

L'expression obtenue pour la transmittance complexe comporte des exponentielles complexes et est donc assez lourde à manipuler mathématiquement.

Exemple : filtre moyenneur sur deux valeurs : $y_n = 0,5(x_n + x_{n-1})$

On passe aisément à $T(z)$:

$$Y(z) = 0,5(X(z) + X(z).z^{-1}) = 0,5.X(z)(1 + z^{-1}) \quad \text{d'où : } T(z) = 0,5(1 + z^{-1})$$

puis à la transmittance complexe $\underline{T}(j\omega)$:

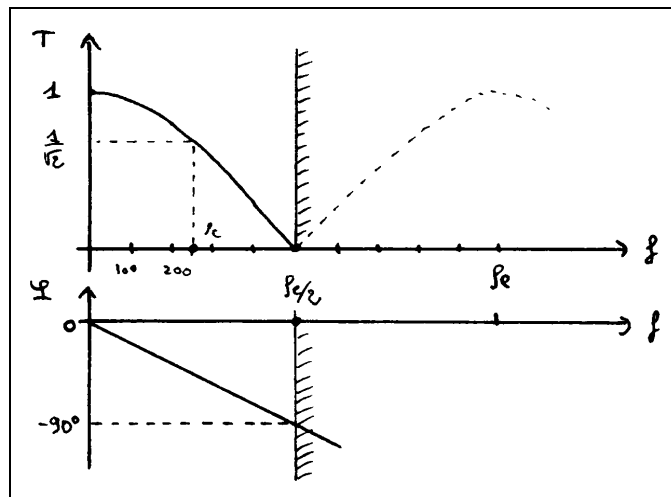
$$\underline{T}(j\omega) = 0,5(1 + e^{-Tej\omega}) = 0,5.(1 + \cos(\omega Te) - j\sin(\omega Te))$$

et, enfin, au module et à l'argument de la transmittance :

$$T = 0,707\sqrt{1 + \cos(2\pi f/Fe)} \quad \text{et} \quad \varphi = -\arctg\left(\frac{\sin(2\pi f/Fe)}{1 + \cos(2\pi f/Fe)}\right)$$

Si la fréquence d'échantillonnage vaut $Fe = 1$ kHz, le diagramme de Bode aura l'allure suivante :

Figure 21.
Diagramme de
Bode d'un filtre
moyenneur.



On peut remarquer que :

- la bande de fréquences utile va de 0 à $Fe/2$ pour respecter la règle de Shannon
- dans cette bande le filtre est un passe-bas
- la fréquence de coupure déterminée graphiquement est de l'ordre de 250 Hz
- la courbe de phase est linéaire

6) Synthèse d'un filtre numérique :

Il existe différentes techniques possibles pour réaliser des filtre numériques qui répondent à une spécification donnée.

Nous avons vu précédemment la **méthode par identification de la réponse indicielle ou impulsionnelle**.

Les filtres sophistiqués sont élaborés par des **logiciels de synthèse de filtre numériques** auxquels il suffit de fournir le gabarit souhaité. Le logiciel fournit alors le jeu de coefficients correspondants.

Arrêtons nous un instant sur une méthode particulière qui permet de réaliser le filtre numérique équivalent à un filtre analogique donné : c'est la **méthode de la transformée bilinéaire**.

La technique donnée comme une « **recette** » est la suivante :

- on veut réaliser un filtre ayant une fréquence caractéristique f_0 (de coupure ou centrale)
- on calcule une pulsation fictive ω_a
- on écrit la transmittance de Laplace du filtre ayant comme pulsation caractéristique ω_a
- on remplace p par $(z-1)/(z+1)$ pour obtenir $T(z)$

Exemple : on désire faire la synthèse d'un passe-bas du premier ordre coupant à $f_0 = 100$ Hz , la fréquence d'échantillonnage étant de $F_e = 1000$ Hz.

$$\omega_a = \text{tg}(2\pi f_0 T_e / 2) = 0,32452 \quad \text{d'où}$$

$$T(p) = \frac{1}{1+p/\omega_a} \approx \frac{1}{1+3p} \quad \text{et} \quad T(z) = \frac{1}{1+3(z-1)/(z+1)} = \frac{1+z^{-1}}{4-2z^{-1}}$$

sa transmittance complexe s'écrit :

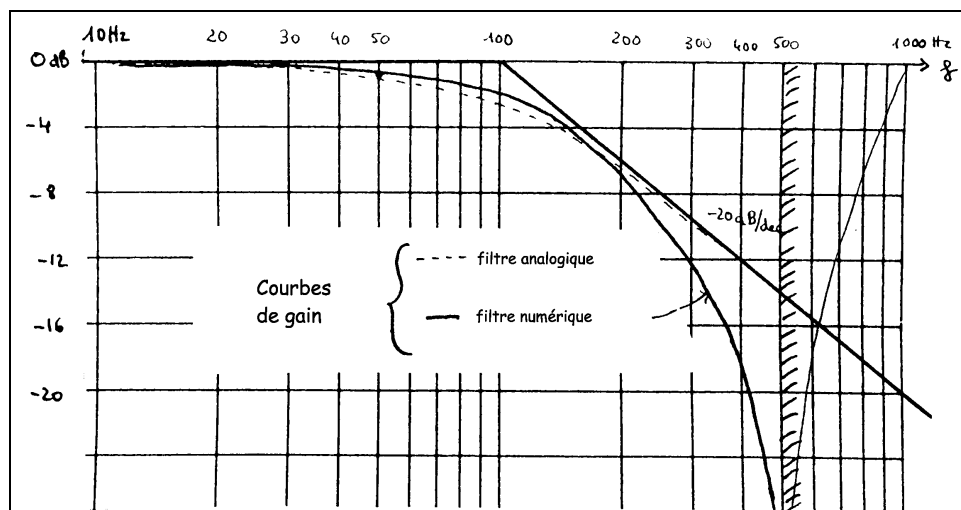
$$T^*(j\omega) = \frac{1 + \cos(\omega T_e) - j\sin(\omega T_e)}{4 - 2(\cos(\omega T_e) - j\sin(\omega T_e))}$$

et son module :

$$T(\omega) = \frac{1 + \cos(\omega T_e)}{10 - 8 \cos(\omega T_e)}$$

La comparaison des courbes de gain du filtre analogique et de son homologue numérique met en évidence une bonne correspondance pour les fréquences inférieures à 300 Hz :

Figure 22.
Comparaison
filtre analogique /
filtre numérique
du 1^{er} ordre.



7) Réalisation matérielle du filtre :

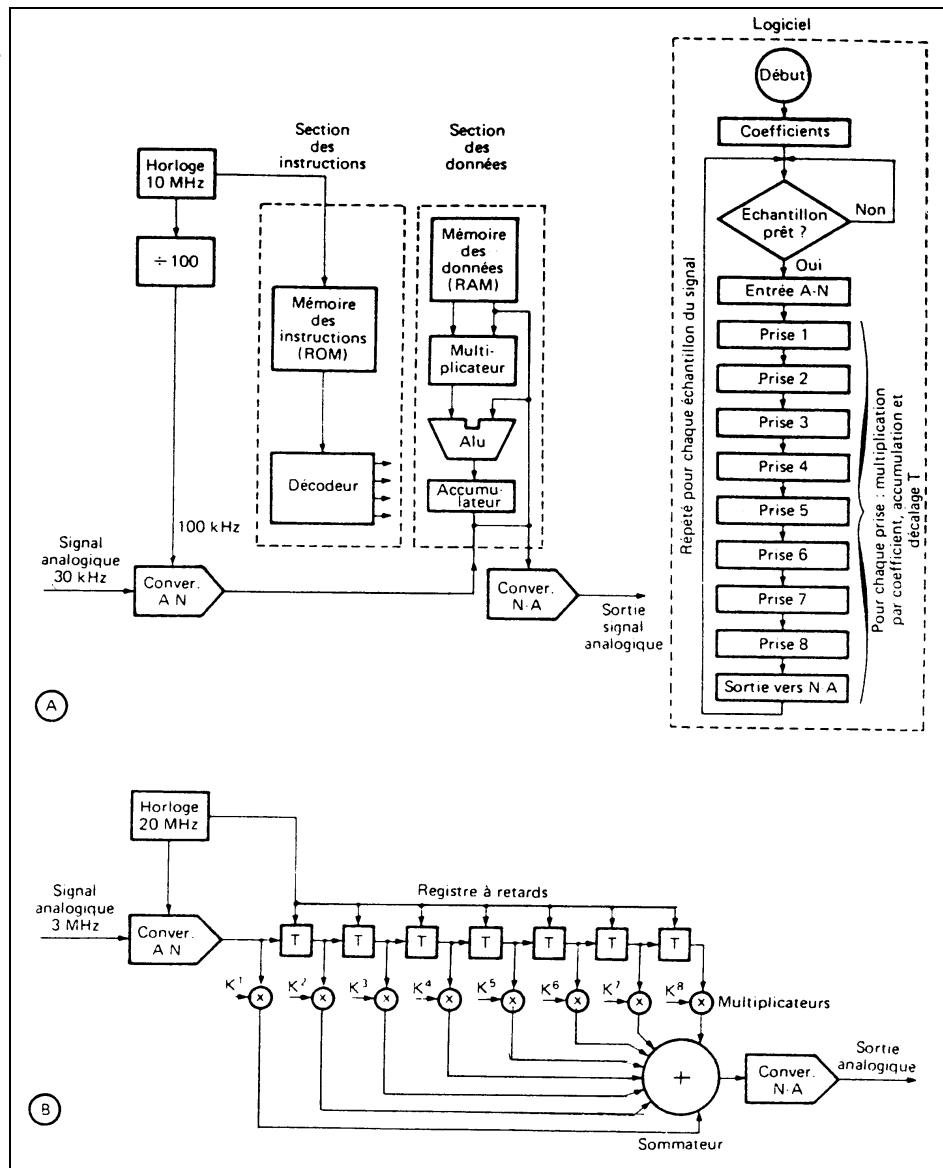
Pour réaliser concrètement un filtre numérique on a deux possibilités :

- travailler en logique câblée (assemblage de circuits logiques, mémoires, portes, additionneurs, multiplieurs, etc ...)
- utiliser un système programmé (microprocesseur spécialisé ou non)

Avec l'augmentation extraordinaire de la vitesse de calcul des processeurs spécialisés dans le traitement du signal, les filtres en logique câblée sont limités aux dispositifs qui doivent être très rapides.

Ces deux solutions sont illustrées sur la figure suivante :

Figure 23.
Réalisation pratique
de filtres
numériques.



La grande supériorité des filtres numériques sur les filtres analogiques est la possibilité qu'ils offrent de pouvoir évoluer au cours du temps en réactualisant régulièrement les valeurs des coefficients.

III) Restitution d'un signal analogique :

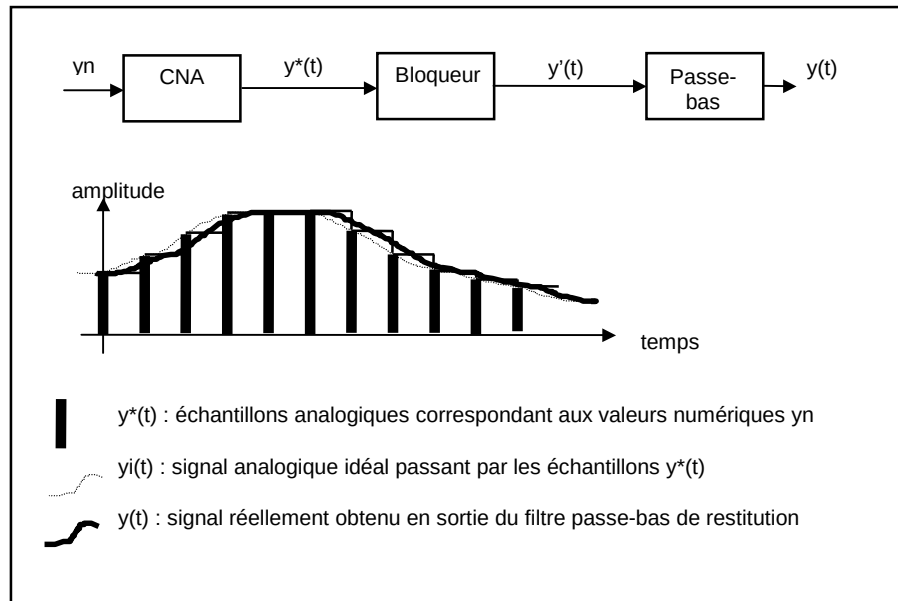
1) Par bloqueur et filtrage passe-bas :

En sortie du système numérique, il faut transformer la séquence numérique y_n en signal analogique $y(t)$. Pour cela, la séquence y_n est appliquée à un convertisseur numérique analogique qui fournit en sortie les échantillons $y(nT_e)$.

Ces convertisseurs sont toujours équipés d'un bloqueur qui maintient en sortie la valeur de l'échantillon $y(nT_e)$ jusqu'à l'arrivée de l'échantillon suivant $y((n+1)T_e)$.

Le signal en marches d'escaliers ainsi obtenu est simplement lissé par un filtre passe-bas.

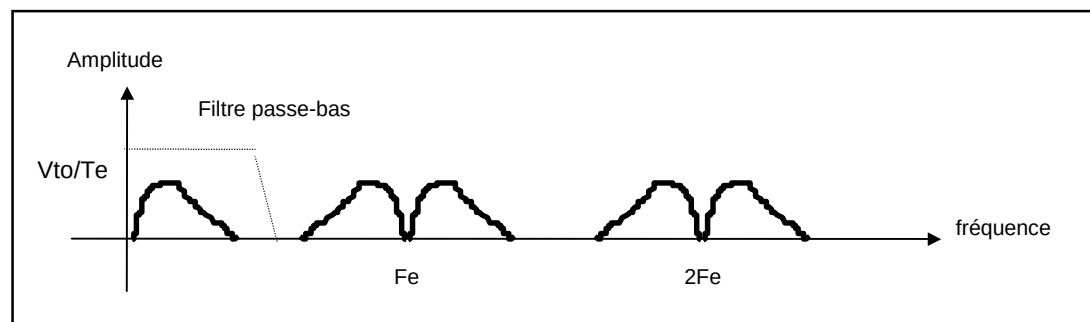
Figure 24.
Structure d'un
système de
restitution.



On constate que cette structure ne fournit pas le signal idéal $y_i(t)$, mais une approximation $y(t)$ de ce signal, ce qui n'est guère acceptable dans un système de reproduction du son de bonne qualité.

En théorie, on peut obtenir le signal $y_i(t)$ à partir de $y^*(t)$ par simple filtrage passe-bas :

Figure 25.
Restitution du
signal analogique
par filtrage
passe-bas.

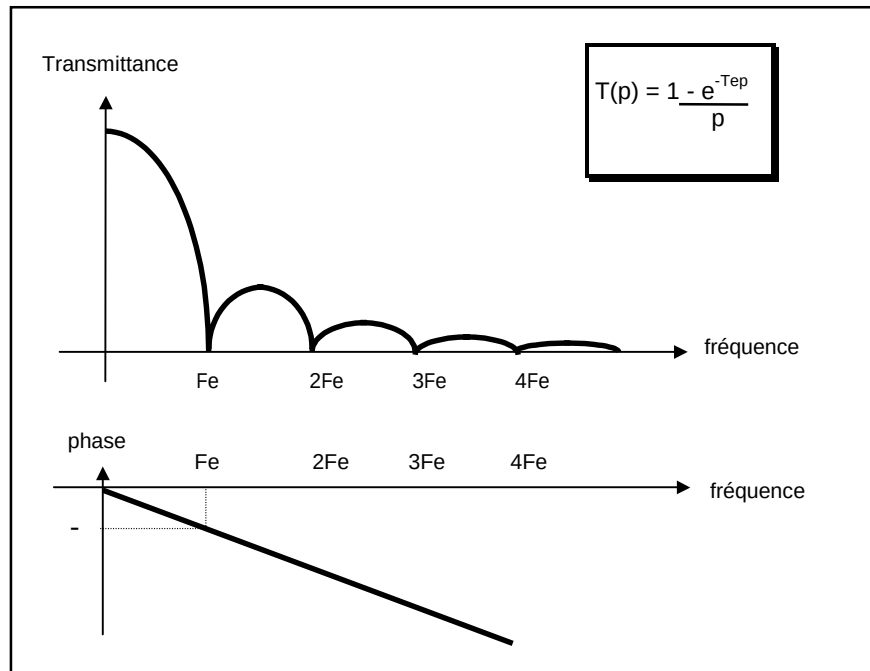


Cette solution n'est pourtant pas envisageable dans la pratique parce qu'elle donne un signal $y_i(t)$ certes exact, mais d'amplitude extrêmement faible et donc forcément parasité par des signaux numériques (horloge en particulier).

2) Distorsion du spectre due au bloqueur :

Pour voir simplement l'influence du bloqueur sur le signal de sortie, dessinons le spectre du signal en sortie du bloqueur en considérant celui-ci comme un filtre dont la transmittance (et par conséquent aussi la courbe de gain et la courbe de phase) a une expression très particulière :

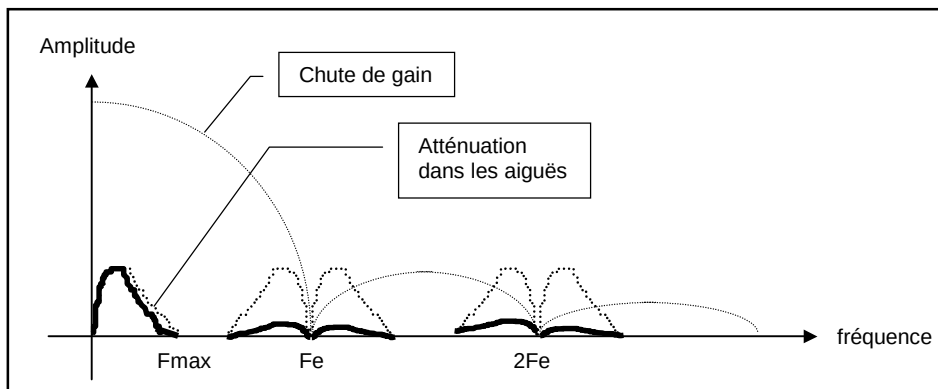
Figure 26.
Transmittance du
bloqueur.



La transmittance du bloqueur est une courbe en $\sin(X)/X$ appelée aussi sinus cardinal et la courbe de phase est linéaire.

Pour obtenir le spectre du signal en sortie du bloqueur, il suffit de superposer le spectre des échantillons $y^*(t)$ et la transmittance du bloqueur :

Figure 27.
Restitution par
bloqueur.

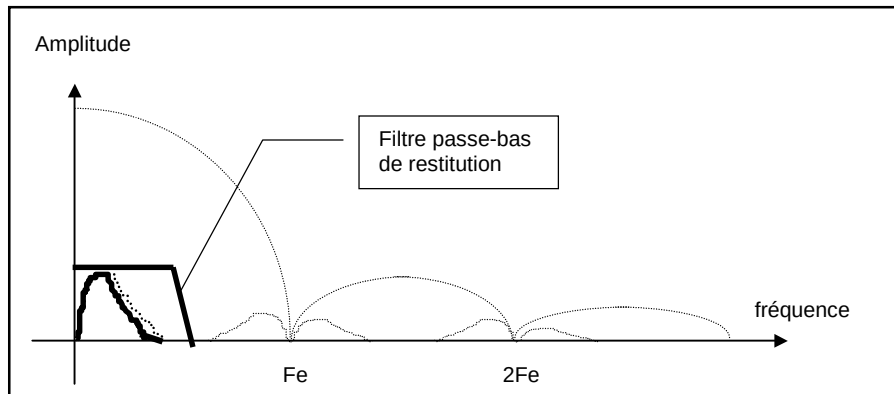


On constate les résultats suivants :

- le premier paquet spectral est légèrement déformé à cause de la chute du gain du bloqueur, l'atténuation étant la plus sensible au voisinage de F_{max}
- les paquets autour de Fe , $2Fe$... sont atténués mais subsistent et traduisent la présence des marches d'escalier

Le filtre passe-bas de restitution permet de supprimer ces paquets autour de F_e , $2F_e$...et ainsi de lisser le signal :

Figure 28.
Utilisation d'un
filtre passe-bas
de restitution.



On constate que le signal $y(t)$ en sortie du filtre de restitution diffère du signal idéal $y_i(t)$ correspondant aux échantillons sur deux points :

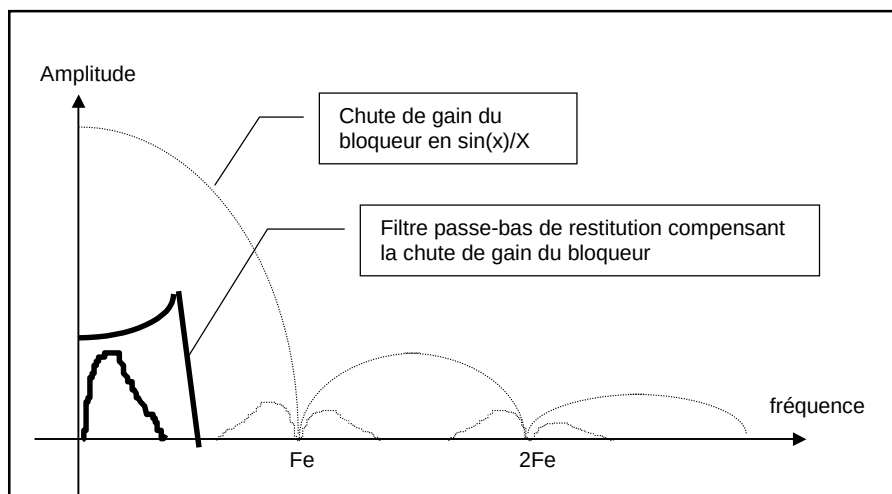
- une atténuation des fréquences aiguës due à la chute de gain du sinus cardinal (de l'ordre de 3dB à $F_e/2$)
- un déphasage de $T_e/2$ lié à la courbe de phase du bloqueur qui n'est absolument pas gênant dans la pratique

Pour passer d'un signal numérique au signal analogique correspondant, on dispose actuellement de 3 possibilités suivant les exigences de précision et de simplicité de réalisation qu'on s'impose :

3) Utilisation d'un filtre compensateur de sinus cardinal :

On peut très bien grâce au filtre compenser la perte des aiguës en utilisant un filtre dont la courbe de gain augmente légèrement jusqu'à F_{max} :

Figure 29.
Filtre passe-bas
de restitution
compensateur de
sinus cardinal.



Ce filtre doit remonter le gain de 4 dB environ à la fréquence $F_e/2$. Si on veut une correction parfaite, ce filtre est délicat à réaliser en analogique, vu l'expression particulière de la transmittance du bloqueur.

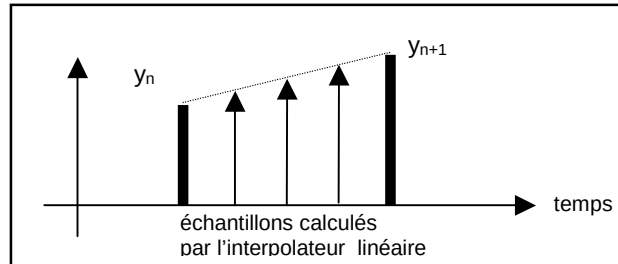
Des exemples de filtres compensateurs de sinus cardinal sont donnés en Annexes B et C.

4) Restitution par suréchantillonnage :

Le convertisseur numérique-analogique est précédé d'un interpolateur linéaire qui calcule un certain nombre d'échantillons qui seront placés entre y_n et y_{n+1} .

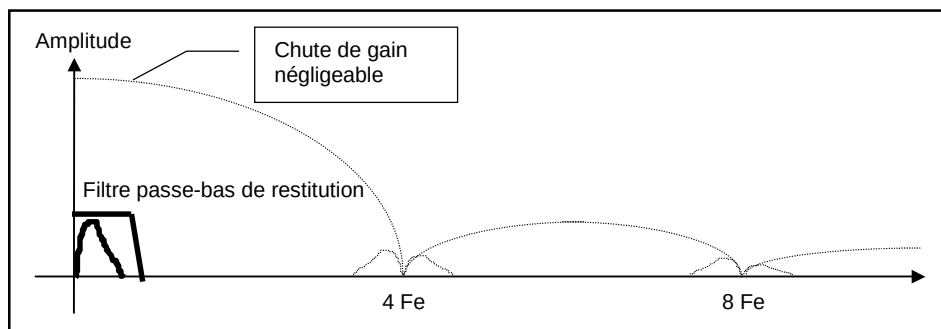
Observons la situation au niveau des échantillons et du spectre dans le cas du quadruple suréchantillonnage.

Figure 30.
Calcul de 4 échantillons intermédiaires.



On dispose alors de 4 échantillons au lieu d'un seul pour la période d'échantillonnage T_e . La nouvelle fréquence d'échantillonnage apparente vaut donc $F'e = 4.F_e$ et le spectre du signal après conversion et blocage a l'allure suivante :

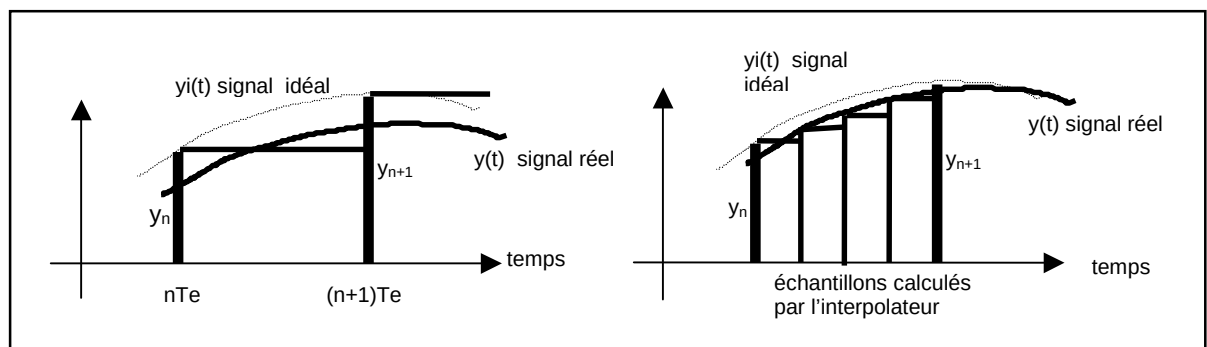
Figure 31.
Signal restitué après suréchantillonnage



On constate que dans la bande du signal le gain du bloqueur reste pratiquement à une valeur constante, le signal restitué est donc presque le signal idéal défini précédemment.

Les échantillons intermédiaires ne sont pas exacts, mais calculés par interpolation linéaire, ce qui évite une augmentation effective de F_e avec ses conséquences négatives (accroissement du flux de données et de la capacité de stockage, diminution de la durée du CD etc...).

Figure 32.
Signal restitué sans et avec interpolation.

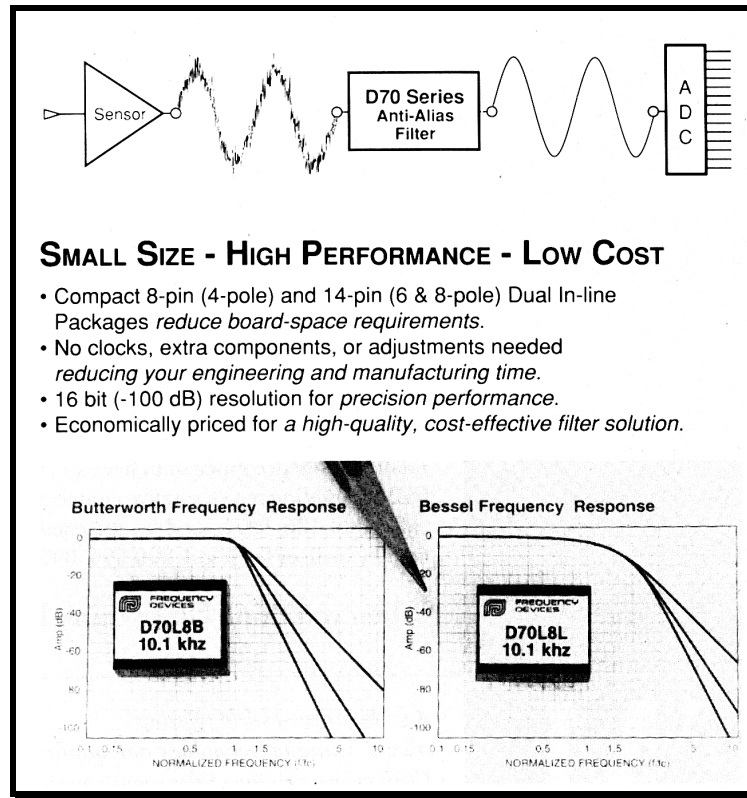


Pour que l'interpolation soit efficace même entre deux échantillons qui ne diffèrent que par le LSB, il faut que le calcul se fasse sur un nombre de bits supérieur.

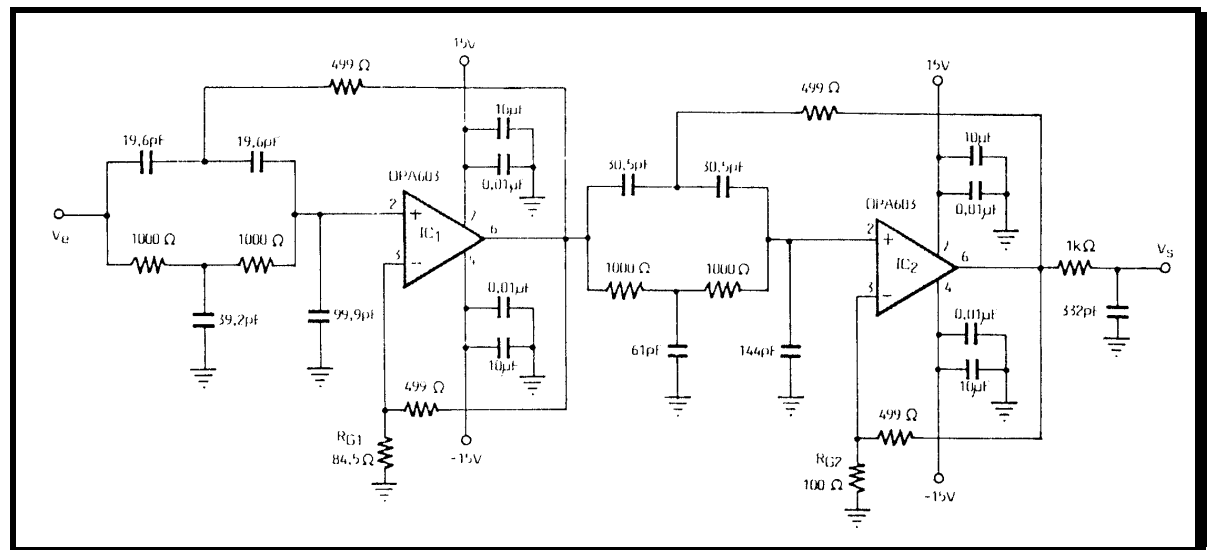
C'est ainsi que dans les lecteurs de disques compacts actuels qui utilisent couramment l'octuple suréchantillonnage à la restitution, en sortie de l'interpolateur les échantillons sont codés sur 20 voire 22 bits.

Annexe A : exemples de filtre antirepliement

- filtre anti-repliement hybride commercial, atténuation dans la bande rejetée supérieure à 100 dB



- filtre anti-repliement à $f_c = 5$ MHz, atténuation dans la bande rejetée de 75 dB



Annexe B : exemple de filtre compensateur de sinus cardinal

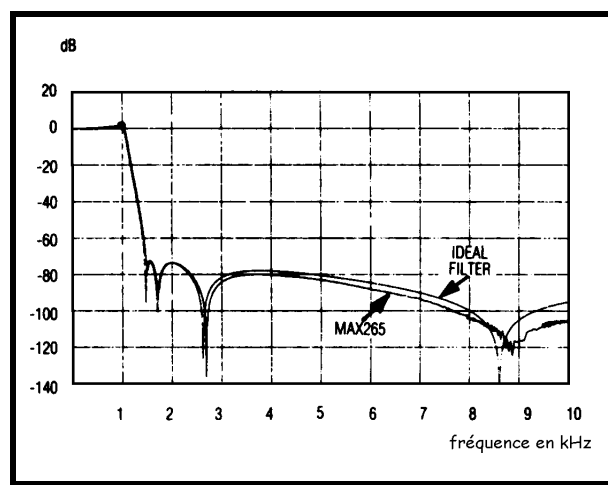
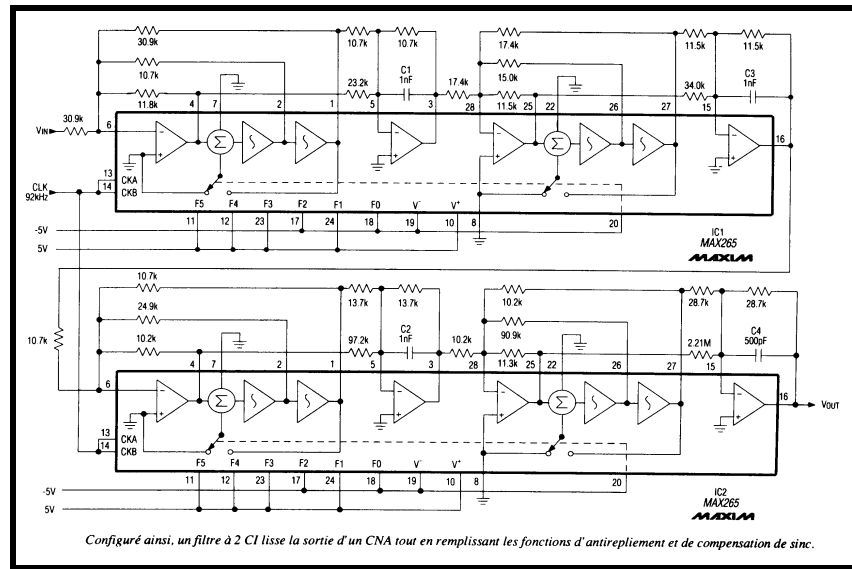
Deux doubles filtres biquad intégrés et quelques composants externes forment un filtre à usages multiples pour la reconstruction des signaux en provenance de convertisseurs numériques/analogiques.

La réponse idéale du filtre devrait comporter une compensation du sinc jusqu'à $f_s/2$, puis tomber brutalement à zéro et maintenir cette atténuation infinie pour toutes les fréquences supérieures à $f_s/2$.

Dans la réalité, les filtres ne peuvent pas produire une transition aussi abrupte ou une atténuation infinie, ce qui se traduit dans les faits par un compromis. Le circuit effectuant la coupure sur une largeur de bande finie (rapport de transition), produisant ensuite une réjection hors bande comparable au rapport signal/bruit du convertisseur numérique/analogique.

Ce rapport se situe aux alentours de 6dB/bit pour un CNA idéal, ce qui équivaut à 72dB pour un CNA 12 bits. L'erreur de quantification dégrade encore un peu plus ce rapport, conduisant à une valeur d' environ 68dB pour un convertisseur typique 12 bits.

Structure du filtre et courbe de réponse :



Annexe C : exemple d'interface entrée-sortie pour DSP

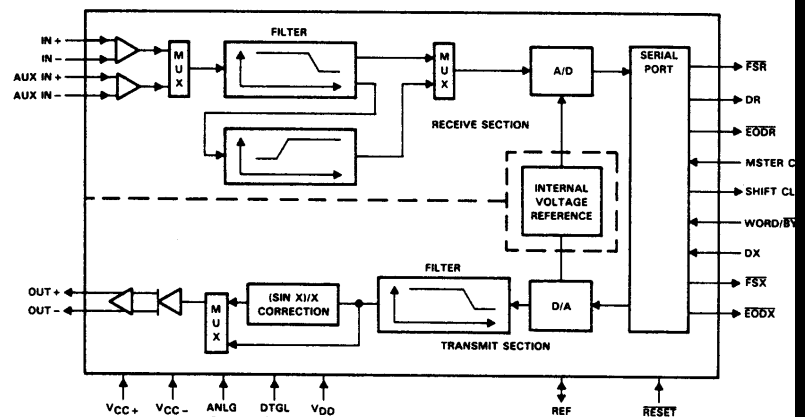
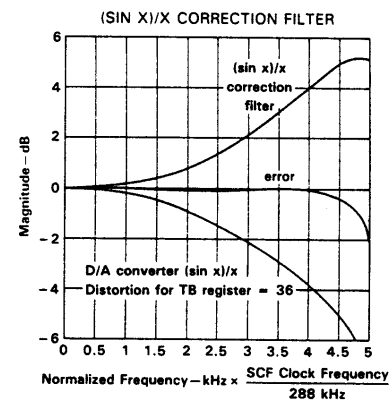
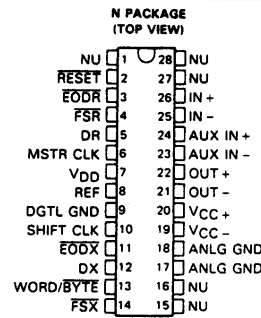
TLC32044C, TLC32044I
VOICE-BAND ANALOG INTERFACE CIRCUITS

D3098, MARCH 1988 - REVISED MAY 1991

- Advanced LinCMOS™ Silicon-Gate Process Technology
- 14-Bit Dynamic Range ADC and DAC
- 16-Bit Dynamic Range Input with Programmable Gain
- Variable ADC and DAC Sampling Rate Up to 19,200 Samples per Second
- Switched-Capacitor Antialiasing Input Filter and Output-Reconstruction Filter
- Serial Port for Direct Interface to TMS320C17, TMS32020, TMS320C25, and TMS320C30 Digital Processors
- Synchronous or Asynchronous ADC and DAC Conversion Rates with Programmable Incremental ADC and DAC Conversion Timing Adjustments
- Serial Port Interface to SN74299 Serial-to-Parallel Shift Register for Parallel Interface to TMS32010, TMS320C15, or Other Digital Processors
- Internal Reference for Normal Operation and External Purposes, or Can Be Overridden by External Reference
- 600-mil Wide N Package (C_L to C_L)

description

The TLC32044 is a complete analog-to-digital and digital-to-analog input/output system on a single monolithic CMOS chip. This device integrates a bandpass switched-capacitor antialiasing input filter, a 14-bit-resolution A/D converter, four microprocessor-compatible serial port modes, a 14-bit-resolution D/A converter, and a low-pass switched-capacitor output-reconstruction filter. The device offers numerous combinations of Master Clock input frequencies and conversion/sampling rates, which can be changed via digital processor control.



Annexe D : tableau des transformées en z

Expression temporelle	Transformée en z
$f(t)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - nT)$	z^{-n}
A	$\frac{Az}{z - 1}$
At	$\frac{ATz}{(z - 1)^2}$
e^{-at}	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$f(t - nT)$	$z^{-n} F(z)$
$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(z) + \beta F_2(z)$

T : période d'échantillonnage

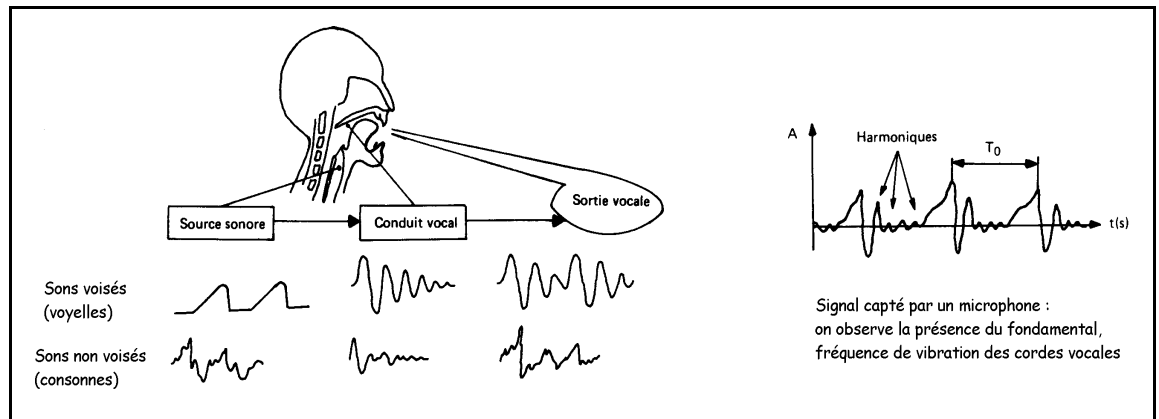
Annexe E : les filtres numériques et la synthèse vocale

Les applications des filtres numériques sont très nombreuses, car ils sont particulièrement intéressants pour réaliser des filtres d'ordre élevé, donc à grand nombre de pôles.

Il est aussi possible, en faisant varier les coefficients a_i et b_j dans l'algorithme de calcul, de réaliser des filtres adaptatifs dont la transmittance $T(z)$ évolue au cours du temps.

Une belle application de cette propriété est la synthèse de la parole. En effet, l'appareil phonatoire humain est constitué par :

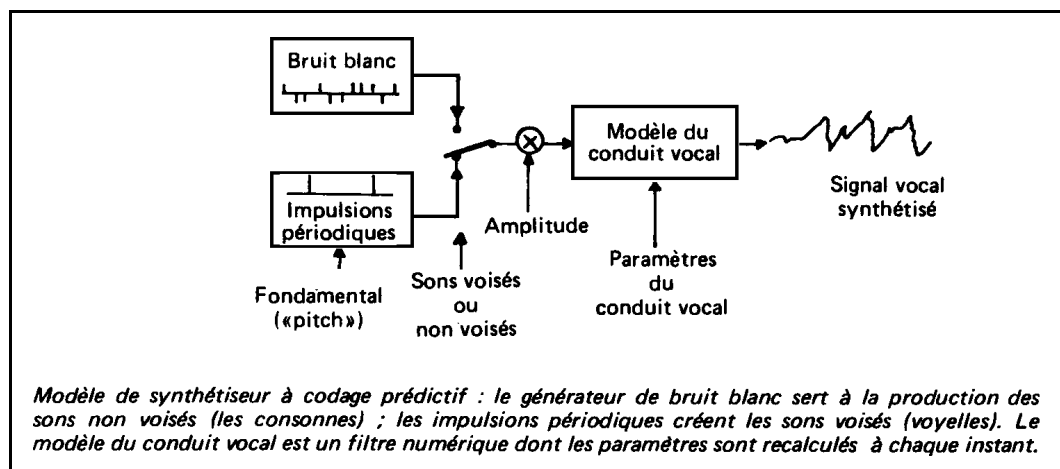
- les cordes vocales qui émettent des sons caractérisés par un fondamental (120 Hz environ pour un homme et 220 Hz pour une femme)
- un filtre acoustique constitué par les cavités buccale et nasale qui modifie le signal sonore issu des cordes vocales



On peut modéliser le conduit vocal par un filtre numérique défini par une équation de récurrence du type :

$$y_n = a_1 \cdot y_{n-1} + a_2 \cdot y_{n-2} + \dots + a_{10} \cdot y_{n-10}$$

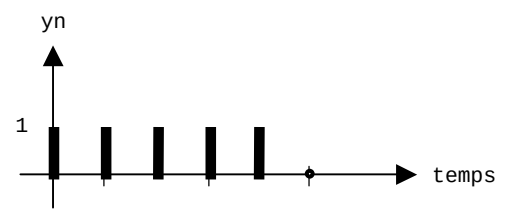
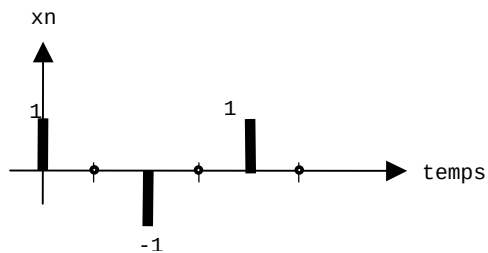
Pour modéliser le larynx qui se déforme lorsqu'on parle, les paramètres du filtre sont actualisés toutes les 20 ms environ en fonction de la syllabe prononcée. La structure d'un système de synthèse de la parole est donc la suivante :



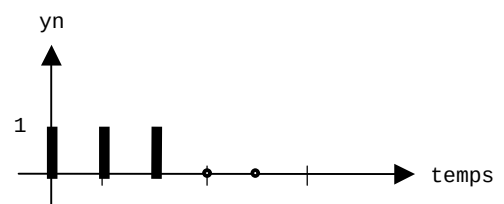
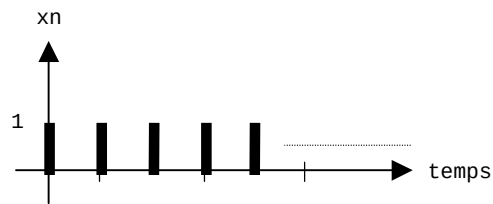
Un système moderne comme le téléphone GSM utilise cette technique de synthèse vocale puisqu'il ne transmet pas directement la voix numérisée du correspondant, mais un signal d'excitation (voix codée sur 3 bits soit 8 niveaux) et les paramètres a_i du filtre numérique de synthèse vocale. Cela permet d'avoir une qualité très correcte avec un débit réduit à 13 kbits/s.

Exercices d'application :

1) Calculer les transformées en z des deux signaux suivants :



2) Donner la transmittance en z et l'algorithme de calcul du filtre qui a un signal xn en échelon répond par le signal yn suivant :



3) Trouver l'algorithme de calcul du filtre dont la transmittance s'écrit : $H(z) = \frac{z^2 + 3z - 1}{z^2 + 2}$

4) Les filtres suivants sont-ils stables ou instables ?

$$H1(z) = \frac{1}{z - 0,5}$$

$$H2(z) = \frac{z^{-1} + 6z^{-2}}{z^{-1}(1 - 0,2z^{-1})}$$

$$H3(z) = \frac{z + 6z^2 + 8z^{-3}}{z^2 + z - 2}$$

5) Soit le filtre numérique dont la transmittance s'écrit : $H(z) = \frac{1}{z - 1}$

a) La fréquence d'échantillonnage vaut $f_e = 10$ kHz. Dans quel domaine de fréquences de filtre est-il utilisable ?

b) Calculer la transmittance de Bode $H(j\omega)$ de ce filtre et établir les expressions du module H et du déphasage φ .



Merci pour l'intérêt que vous portez à mon travail. J'espère que le cours que vous avez téléchargé répond à votre attente.

Si, malgré le soin qui a été apporté à la rédaction de ce document, vous constatez l'existence d'erreurs, merci de me les signaler par Email à jean-philippe.muller1@wanadoo.fr

Comme toute œuvre intellectuelle, ce document est protégé par le Copyright et son usage est réservé à une utilisation personnelle.

Techno Assistance Formation

1, rue du Capitaine Pilleux
68720 ZILLISHEIM

Site : <http://www.ta-formation.com>